

電場實驗：二維空間之等位線及電力線測量

編者：國立清華大學物理系



一、目的：荷電體在空間所形成的電場無法直接測量，通常是經由測量分佈於空間中的等電位面，再根據等電位面與電場間的關係，描繪出用以代表電場之電力線的分佈情形，以進一步獲知空間中電場的資訊。本實驗利用具碳膜及不同電極形狀的電場描繪板來模擬二維空間中不同分佈荷電導體之等電位線的分佈情形，並學習如何描繪電力線，以熟悉不同電荷分佈體的電場分佈。

二、原理：

(一)庫倫定律(Coulomb's law)

自然界存在帶正電和帶負電兩種電荷，同性電荷相斥，異性電荷相吸。真空中兩個點電荷間的靜電作用力遵守庫倫定律：

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1)$$

即兩個荷電導體間的靜電力 F 大小正比於兩荷電導體之電量 q_1 及 q_2 的乘積，但和兩電荷中心的距離 r 成平方反比。庫倫定律僅適用於點電荷，即當荷電導體的三維尺度遠比兩荷電導體間的距離小很多的情況。

在國際標準單位制(SI)中，力的單位為牛頓(N)，距離為公尺(m)，電荷的單位為庫倫(C)，(1)式中的比例常數 k_0 值：

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

若兩電荷位於介質中，因介質會受電場作用產生極化(polarization)，進而改變兩電荷間的靜電力大小，(1)式必須改寫為：

$$F = \frac{1}{4\pi\kappa\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2)$$

式中 ϵ_0 為真空中的介電常數， κ 稱為相對介電常數(dielectric constant)。真空的相對介電常數為 1，空氣在一大氣壓下的相對介電常數 κ 為 1.00054，玻璃的 κ 約在 5~10；雲母片(mica)的 κ 為 3~6；油的 $\kappa = 2 \sim 2.5$ 。對同一介質而言，介電常數會隨溫度、壓力...等因素而變化。

(二)電力線與電場(lines of electric force and electric field)

科學家常以“場(field)”的觀念來描述空間中力的作用情形。在一荷電導體附近任一點放置一試驗電荷(test charge) q_0 ，則荷電導體與試驗電荷彼此之間會產生靜電力。此作用力可由荷電導體於空間所形成的電場 E ，作用於試驗電荷 q_0 的作用力 $F = q_0 E$ 描述之。如果在空間中作用於某一位置的試驗電荷 q_0 上的靜電力為 F ，則定義該空間點的電場(electric field)為：

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (3)$$

電場為具有方向的物理量，其方向與帶正電的試驗電荷在電場中所受的力方向相同。

法拉第(M. Faraday)認為以力線(lines of force)描繪向量場在空間中的分佈情形，可使抽象的向量場以比較具體的方式呈現，因此引入以“電力線”(lines of electric force)來描述空間中電場的性質，包括電場的強度和方向。圖 1 顯示幾種不同電荷分佈體在空間的電力線圖。

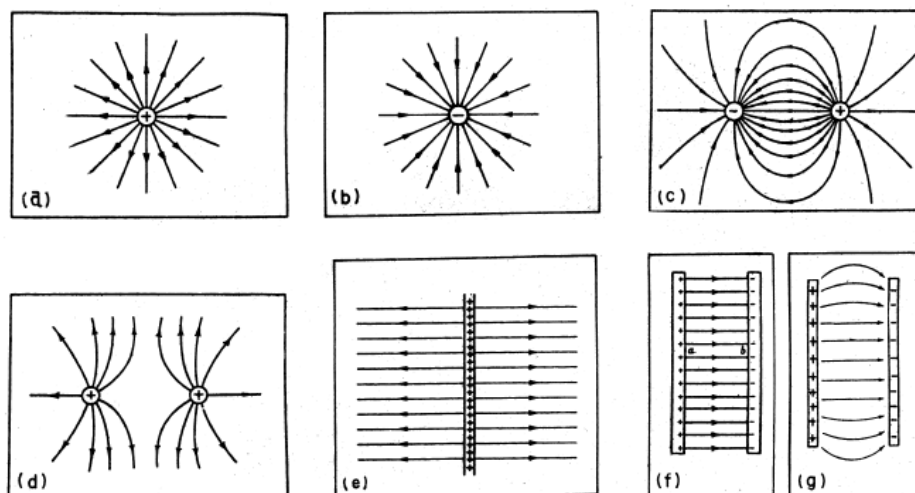


圖 1 不同電荷分佈體的電力線圖：(a)正電荷；(b)負電荷；(c)正、負電荷對；(d)兩個正電荷；(e)荷正電的無窮大平板；(f)無限面積正負電荷平行板；(g)有限面積正負電荷平行板。

電力線是根據下列幾項規則描繪出空間中各點電場的強弱和方向：

- (1) **電場方向**：電力線上任何一點的電場方向為通過該點之力線的切線方向，並指向正(試驗)電荷 q_0 受力的方向，常在電力線上加上“箭頭”以表示電場的方向。如果建立電場的電荷源 Q 為正電荷，則電力線自 Q 出發指向四周(指離電荷體)； Q 為負電荷時，電力線則指向 Q 。如圖 1 中所呈現的電力線圖。
- (2) **電場強度**：通常以垂直通過含有該點之單位截面積上的電力線數表示。電力線較密集處的電場較強；力線數較疏散之處，電場則較弱；均勻電場則以一組等距的平行線表示，如圖 1(e)和 1(f)中所示之平行電荷板的電力線圖。

(3) **兩電力線不會相交**：若有不同的電力線相交在空間中的某一點，於該點置放一試驗電荷 q_0 ， q_0 應會受到兩個不同方向之電場的作用，而產生兩個不同方向的電力作用。但此結果與電場的產生來自單電荷源的假設不符，故可簡略地說明電力線不可能交會。

(三) 電位差(potential difference)與等位線(equipotential line，或等位面)：

一電荷對其周圍的荷電物體的作用，除可用具向量形式的電場 E 描述，也可用屬純量的電位(electric potential) V 描述。電場為一微觀的物理量，且為向量；電位則為微觀電場的作用下，所展現的巨觀物理量；故電場和電位之間有密切的關係。通常微觀的電場不易以儀器直接量度，但巨觀的電位可使用簡單的電位計或其他類似儀器直接測量得。

一電荷 q 在電場中會受電力作用，因此，將 q 從位置 A 移到另一位置 B ，電場會對其作功 W 。考慮 q 移動時，電荷一直維持在平衡狀態，並測得電場對 q 所作的功為 W_{AB} ，則定義 A 、 B 兩點間之電位差 V_{AB} 為單位電荷從 A 點移至 B 點所需的功：

$$V_{BA} = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q} \quad (4)$$

如果設位置 A 在無窮遠處，因為在無窮遠處的電荷 q 不會受到電場的作用，則可稱 B 、 A 兩點之間的電位差為 B 點的**絕對電位(absolute potential)**，簡稱**電位(potential)**。亦即，將單位正電荷自無窮遠處移至電場內某一點所需作的功，定義為該點之電位：

$$V = \frac{W}{q} \quad (5)$$

在此，定義無窮遠處的電位 V_A 為零，以 SI 單位制表示(4)及(5)式中各物理量的單位：功 W 為焦耳(joule, J)；電荷 q 為庫倫(Coulomb, C)；電位差 V_{AB} 的單位為伏特(volt, V)。

因靜電力隸屬中心力(central force)，故將電荷 q 從 A 點移到 B 點所做的功與電荷移動的路徑無關。若將空間中電位相等的點以線(或面)連接，則此線(或面)稱之為等位線(或等位面)，其具有下列幾項特性：

- (1) **等位面上的電荷移動不需作功**：若將試驗電荷沿等位線(或等位面)移動，則不需要作功。
- (2) **電場(或電力線)必垂直於等位面**：由上述可知，電場沿等位面的分量應為零。
- (3) **導體內沒有電場、沒有電力線**：如果將導體置於電場內，則導體內的傳導電子會被電場驅動，直到導體內每一點均達到等電位為止，所以導體內沒有電場。
- (4) **導體面上之電力線的進出均和其導體表面垂直**：根據上述結果可得，導體的電力線均從導體表面開始，其電力線不論是進或出導體表面，均必與其表面垂直。

點電荷分佈產生的等位線(面)和電力線的關係如圖 2 所示。如果以實驗方法先找出一組等位線，則可以描繪出電力線的分佈圖形。

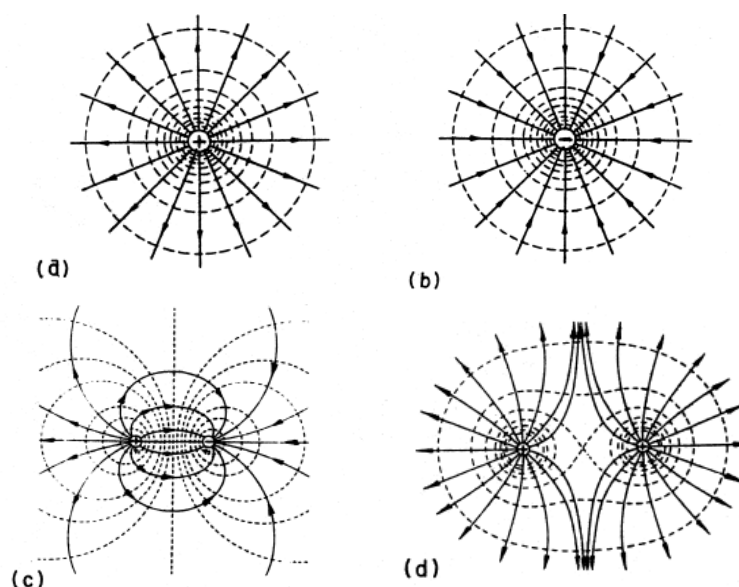


圖 2 等位線和電力線關係圖。圖中實線表電力線；虛線表等位線，(a)正電荷；(b)負電荷；(c)正、負電荷對；(d)兩個正電荷。

(四)電力線的描繪：

電場是電位的梯度(gradient)，即 $\vec{E} = -\nabla V$ 要如何以實驗決定在某一點的電場方向？以該點為圓心畫一圓，如圖 3 所示，則圓心與圓周上任一點的電位差約為 $\delta\vec{r} \cdot \vec{E}$ ，只要找出圓周上電位差最大的位置，此位置與圓心的連線即為電場方向。依梯度的數學概念，圓的半徑越小，決定的電場方向越正確。

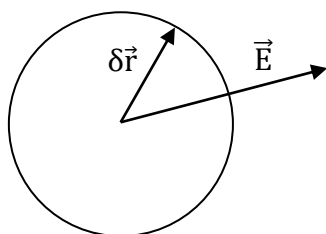


圖 3 電力線的描繪方法

三、儀器：如圖 4 所示

- (1) 導電碳膜板：數個。如圖 5 所示，每一片導體模板上附有不同形狀的電極對，可產生不同分布狀況的二維電場。
- (2) 串聯電阻式分壓器：如圖 6 所示，由九個相同的高功率等值電阻串聯而成，跨過每一電阻提供等量的電位差。
- (3) 低電壓直流數位電源供應器：1 台
- (4) U 型探棒：1 支
- (5) 微安培(μA)檢流計：靈敏度越高的檢流計對等位點的偵測越精確。當 U-型探棒移至和電阻串座上所選擇的電位值 V_x 相等時，檢流計的讀數應為零，則表該點為 V_x 的等位點。
- (6) 數位三用電表：1 個
- (7) 連接導線：5 條。

(8) 自備方格紙或白紙：至少四張，

(9) **直尺及圓規：請自備**



圖 4 實驗器材

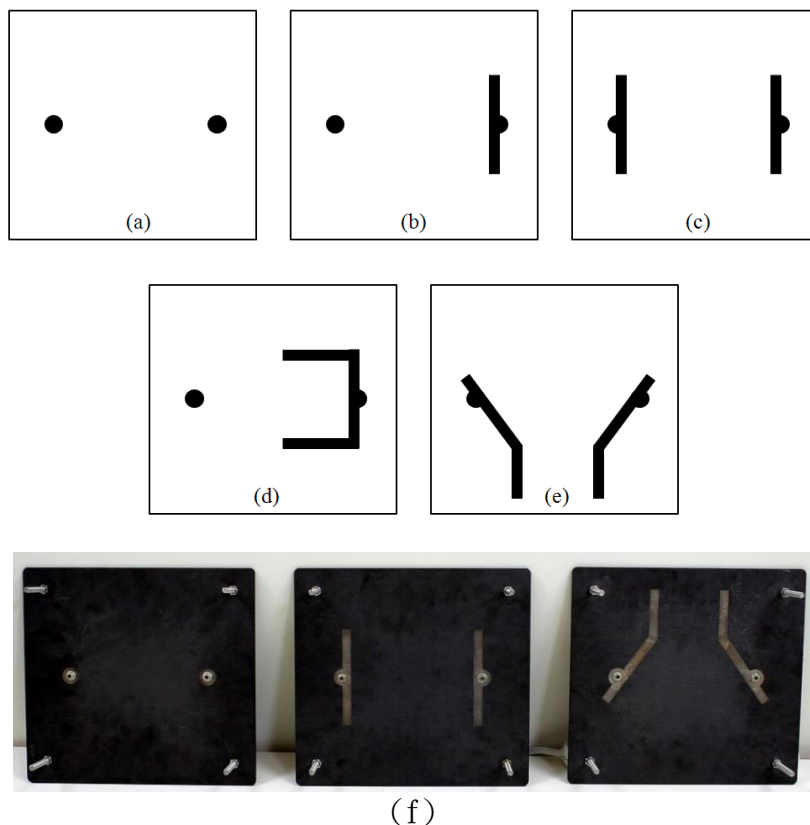


圖 5 附有不同形狀之電極對的導電碳膜板示意圖和實體照片：(a)點狀電極:用以作為點狀電場源；(b)點和直線電極；(c)平行板電容器：可提供近似平行的電場源；(d)法拉第“冰桶”；(e)一端張開的平行板； (f)導電碳膜板的實體照片。

五、實驗步驟

(一)二維空間的電位變化趨勢測量：電極中心連線對稱軸上的電位隨位置的變化測量

1. 本實驗利用導電碳模板不同形狀的電極組合，探討當在兩電極間外加一固定的電位差時，於碳模板的二維空間內所產生的電場分布。
2. 取圖 6 所示的(a)點狀電極對點狀電極(用以作為兩點狀的電場源)。如圖 4 右下方的照片所示，將方格紙或 A4 的空白紙張平貼於導電描繪板上。
3. 透過碳模板上的兩個香蕉插座，分別提供兩電極適當的電位壓。導電碳模板 a 的兩個點狀電極分別接 +1.5 V (正極)和 -1.5 V (負極)，兩端有 3V 的電位差。
4. 利用數位電表測量碳模板上正負兩電極中心連線(對稱軸)上，電位隨位置的變化關係 $V(x)$ ，並將測量結果標示於紙上對應的位置點上。每距離 1 cm 至少測量一點的電位值。

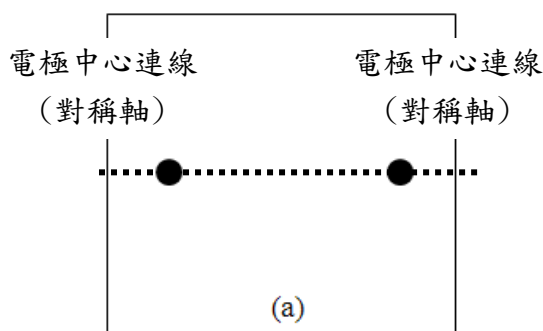


圖 6 第一個實驗所用的導電碳模板示意圖

5. 請畫出並比較導電碳模板 a 實驗數據和二維與三維度的理論推導公式隨位置的變化趨勢圖。

理論上，在二維平面空間的點電荷所產生的電場分布相當於三維空間中一無窮長直電荷體所產生的電場。因此當電場被侷限在二維平面空間內時，電位隨位置的分布不能採用一般典型的三維空間推導公式直接推算結果；而應採用二維空間的電位推導公式。

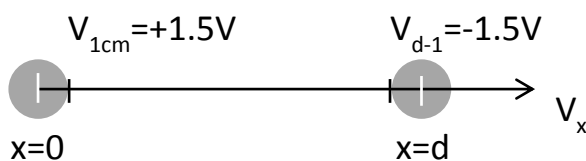
正負電壓絕對值相同時：

3D 點對點對稱軸的電位變化公式： $V_x = C \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(d-x)} \right]$

2D 點對點對稱軸的電位變化公式： $V_x = C [\ln x - \ln(d-x)]$

其中 x 為量測點與其中一點狀電極中心的距離， d 為兩點狀電極中心的距離， C 可以利用邊界條件求得。

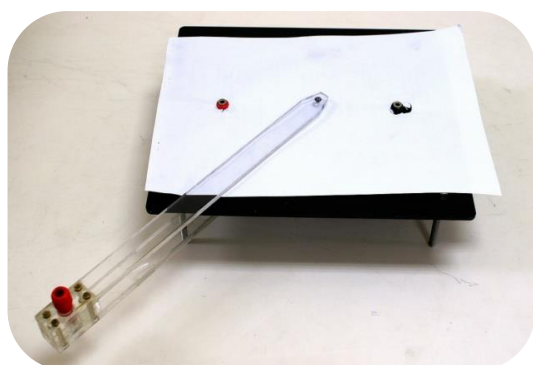
Ex: 電極的半徑為 1cm, 電極邊緣的電位由外加電位決定，如接 +1.5V 的電極點設為 $x=0$ ，則 $V(1\text{cm})=+1.5\text{V}$, $V(d-1\text{cm})=-1.5\text{V}$ 。



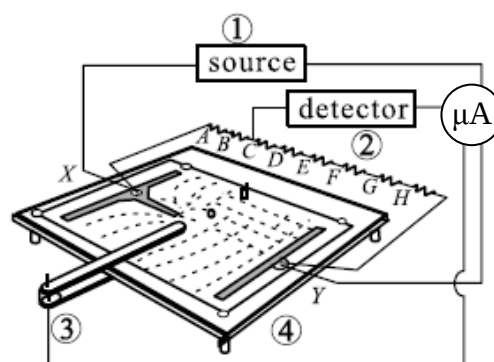
- (a) 請以二維及三維理論公式繪出沿著「兩點狀電極」中心連線上的電位隨位置變化的函數關係。
- (b) 與實驗測量結果繪出之電壓隨位置的變化圖作比較，驗證二維理論的正確性。

(二)以檢流計描繪導電碳膜板 b (點狀電極和線狀電極)的等位線：本實驗利用 U 型探棒，以電流歸零法尋找碳膜板上的等電位線。

1. 選擇碳膜板 b (點狀與線狀電極組合)，如圖 7(a)所示將一張方格紙或 A4 的白紙平貼於電導碳膜板上。



(a)



(b)

圖 7 (a)部分器材組裝，(b)詳細的器材組裝結構圖：①電壓源，②檢流計，③U 型探棒，④電場描繪圖板。

2. 如圖 7(b)所示，將低電壓電源供應器的電壓輸出連接至碳膜板的兩香蕉插座上。點狀電極接+1.5 V，線狀電極接 0 V；藉由兩電極間的電位差，在碳膜板上建立電場。紀錄兩電極的電位和兩電極間的總電位差。
3. 將檢流計一端接於 U 型探棒，另一端接於串聯電阻式分壓器，分壓器可將總電位差平均分成 10 等分的分壓)中的 B 點。
4. U 型探棒在紙上移動，找尋使檢流計讀數為零的點，此點之電位即與電阻分壓器上所接之 B 點的電位相等。繼續尋找一連串和 B 點等電位的點，將所有找到的點以線連接成一條和 B 點等電位之等位線。
5. 重覆步驟 3 找尋和圖 7(b)中 C、D、E、F...點之電位相等的等位線，以描繪出另 9 條等位線，請務必標出每一條等位線的電壓值。兩相鄰等位線間電位差應約為 0.15 V。
6. 根據電力線和等電位線相互垂直的規則，以虛線描繪出電力線，至少描繪出 10 條以上的電力線。電力線的選擇和分佈需考慮到能涵蓋整張碳膜板(繪圖紙)的範圍，意即也需包括每一電極與其最鄰近之邊界間的電力線。
7. 改取圖 5(f)中另一個導體模板，重覆步驟 1~6，描繪出該碳膜板面上的等位線(請務必標出每條等為線的電位值)及電力線的分佈圖形。

(三)利用數位電表描繪出導電碳膜板 b 的等位線及電力線

1. 選用導電碳膜板 b，於點狀電極接+1.5 V，線狀電極接 0 V。
2. 利用數位電表描繪出 9 條等位線，兩相鄰等位線間的電位差約 0.15 V。
3. 利用數位電表及 U-型探棒描繪八條電力線。繪圖方法與步驟如下：
 - (1) 如圖 8 所示，從點狀電極(1.5 V)的中心沿輻射方向分出八等分，並在圓點的圓周邊緣標示出 $P_1 \sim P_8$ 八個邊界等分點。

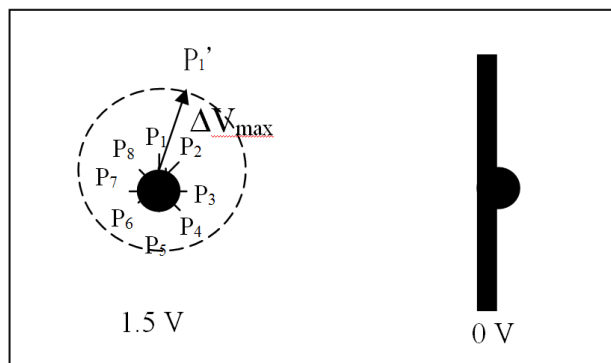


圖 8

- (2) 取其中一點 P_i ($i = 1-8$) 為圓心，並取適當長度為半徑畫一圓，如圖 9 中虛線所繪的圓。建議圓的半徑越小越好，但建議至少大於 1.3 cm，請解釋此兩條件的原因為何？
- (3) 取 P_1 為例，以數位電表量測在等半徑的圓周上，找出與圓心(P_1)點間具有最大電位差 $\Delta V_{\max}$ 的位置點，並將該點標記為 P_1' 。並以箭頭向量標示出 $P_1 P_1'$ 間的連接線，此即 P_1 點處電場的作用方向。請說明為何該箭頭所指的方向為電場方向的理由。
- (4) 接著再以 P_1' 為圓心，重複前兩步驟(2)-(3)，即以相同半徑畫圓，再取最大電位差的位置，標記之；並與 P_1' 連線，所得方向即為 P_1' 點的電場方向。
- (5) 連續重複步驟(4)，直至連線箭號達到線狀電極處或甚至超出繪圖紙的範圍即可。
- (6) 另以 P_i ($i = 2-8$) 為圓心，重複步驟(2)-(5)，以描繪出整個導電碳膜板上的電場分布圖。至少要有八條電力線的走向圖。
- (7) 前述步驟清楚地標示出板上每一位置電場的方向，但各處電場強度的大小如何標示和判別，請說明。

六、問題：

1. 比較兩種描繪等位線方法的差異性和優缺點。
2. 比較兩種電力線取法的差異性和優缺點。
3. 兩條不同的電力線為什麼不可能相交，試述其理由。
4. 解釋電力線必須垂直於等位線的原因。
5. 說明為什麼靠近導體處的等位線平行於導體的表面？
6. 導電碳膜板上的碳膜，若有刮痕，對實驗測量會有何影響？
7. 探討實驗所得的等位線不同於理論的可能原因。
8. 請試著使用軟體繪出(a)板兩個點狀電極接 +1.5 V 和-1.5 V 的等位線。(加分題)